Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Master I - E.D.O - Semestre 2.
Module : *Analyse Fonctionnelle II* - Contrôle continu.
Mardi 12/04/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (08pts) Dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,1];\mathbb{C})$, on considère l'opérateur T défini par :

$$(Tx)(t) = \int_{-1}^{1} (t-s)\, x(s)\, ds$$

1. Montrez que T est continu, puis qu'il est compact.
2. Déterminez le spectre de T.
3. En déduire le rayon spectral de T.

Exercice 2: (06pts) Soit la suite de fonctions $u_n(x) = \dfrac{n}{n^2x^2+1}$, $n \geq 1$. Calculez, dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite de cette suite. On pose ensuite

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} u_n(t)\, dt.$$

Déterminez, toujours dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite de g_n.

Exercice 3: (06pts) Le but dans cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de la distribution $T = vp(\dfrac{1}{x})$ (valeur principale de Cauchy). On rappelle que T peut être définie par l'une des deux formules équivalentes

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\, dx$$

Montrez que $xT = 1$. En déduire que $\widehat{T}$ vérifie une équation différentielle simple du premier ordre. Résoudre complètement cette équation différentielle en calculant la constante d'intégration et ce, en utilisant la fonction test $\varphi(\xi) = \exp(-\xi^2)$. Donnez enfin l'expression de $\widehat{T}$.

Master E.D.O (2015/2016)

Module : Analyse Fonctionnelle II (M1-S2)

Contrôle - Corrigé.

Ex 1 : (08 pts) $H = L^2([-1,1];\mathbb{C})$, $(Tx)(t) = \int_{-1}^{1} (t-s)\,x(s)\,ds$.

1°/ Continuité et compacité de T :

* On a $|(Tx)(t)| \leq \int_{-1}^{1} |t-s|\,|x(s)|\,ds$

$$\leq \|x\|_H \cdot \left(\int_{-1}^{1} |t-s|^2 ds\right)^{1/2} \quad \text{par Cauchy-Schwarz.}$$

$$\leq \sqrt{2t^2 + 2/3} \cdot \|x\|_H.$$

d'où $|(Tx)(t)|^2 \leq (2t^2 + 2/3)\,\|x\|_H^2$

et par intégration sur $[-1,1]$ on aura :

$$\|Tx\|_H^2 \leq \|x\|_H^2 \int_{-1}^{1} (2t^2 + 2/3)\,dt = \frac{8}{3}\,\|x\|_H^2.$$

donc $\boxed{\|Tx\|_H \leq \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \|x\|_H.}$ d'où la continuité.

2 pts

* Compacité : On remarque que

$$(Tx)(t) = t\left(\int_{-1}^{1} x(s)\,ds\right) - \int_{-1}^{1} s\,x(s)\,ds.$$

c.à.d que $(Tx)(t)$ est combinaison linéaire de deux fonctions $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = 1$. Ceci montre que $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Vect}\{e_1, e_2\}$, et donc T est de rang fini. Comme T est continu, alors T est compact.

2 pts

2°/ Spectre de T : Comme T est compact, alors $\sigma(T)$ est formé de 0 et des λ ($\neq 0$) valeurs propres. Soit $\lambda \neq 0$. Pour que λ soit une valeur propre il suffit qu'il existe $\varphi \not\equiv 0$ tq $T\varphi = \lambda\varphi$. Or $(T(\varphi))(t) = a_\varphi \cdot t + b_\varphi = \lambda\varphi(t)$. Donc, puisque $\lambda \neq 0$, $\varphi \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$, càd $\varphi(t) = \alpha t + \beta$.

Mettons $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ dans l'équation $T\varphi = \lambda\varphi$. On aura

$$\lambda[\alpha t + \beta] = \int_{-1}^{1} (t-s)(\alpha s + \beta)\, ds$$

$$= t\left(\int_{-1}^{1} (\alpha s + \beta)\, ds\right) - \left(\int_{-1}^{1} s(\alpha s + \beta)\, ds\right)$$

$$= 2\beta t - \frac{2}{3}\alpha \quad , \forall t \in [-1,1]$$

Par identification, on peut écrire :

$$\begin{cases} \lambda\alpha = 2\beta \\ \lambda\beta = -\frac{2}{3}\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda\alpha - 2\beta = 0. \\ 2\alpha + 3\lambda\beta = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $D = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 4$.

Si $D \neq 0$ alors $\alpha = \beta = 0$ et φ sera $\equiv 0$. Donc l'équation des valeurs propres est donnée par $D = 0 \iff \boxed{3\lambda^2 + 4 = 0}$ qui a pour solution $\lambda = \pm i\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2i}{\sqrt{3}}$.

D'où $\boxed{\sigma(T) = \left\{0, \frac{2i}{\sqrt{3}}, \frac{-2i}{\sqrt{3}}\right\}}$ 2pts

3°/ rayon spectral de T : Le rayon spectral est le plus petit rayon de disque fermé qui contient $\sigma(T)$. On voit bien que

$$\boxed{r(T) = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$ 2pts

Ex 2 : (06 pts) $u_n(x) = \dfrac{n}{n^2x^2+1}$; $n \geq 1$. Il est clair que $u_n(\cdot)$ est continue, donc définit une distribution régulière par $\langle u_n, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\,\varphi(x)\,dx$. Le calcul de $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, veut dire qu'il faut trouver une distribution L tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n \to \infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle L, \varphi \rangle$.

Ainsi $\langle u_n, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n^2x^2+1}\,\varphi(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt \quad \left(\text{en faisant le changement } nx = t\right).$$

Il est clair que $\left|\dfrac{\varphi(t/n)}{t^2+1}\right| \leq \dfrac{\|\varphi\|_\infty}{t^2+1}$ et $\dfrac{1}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$

donc le thm de convergence dominée de Lebesgue s'applique.

$$\lim_{n \to +\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lim \varphi(t/n)}{t^2+1}\,dt$$

3 pts

$$= \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1} = \pi\,\varphi(0) = \langle \pi\delta_0, \varphi \rangle.$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \pi\,\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$

b/ $\lim g_n$? On a $g_n(x) = \left[\operatorname{arctg}(nt)\right]_{-\infty}^{x} = \operatorname{arctg}(nx) + \pi/2$.

$\langle g_n, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\varphi(x)\,dx$ Cette fois il ne faut pas faire de changement de variable car $\operatorname{arctg} t + \pi/2 \notin L^1(\mathbb{R})$.

On fait la majoration : $|g_n(x)\,\varphi(x)| \leq \pi\,|\varphi(x)|$ et $|\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$

on applique de nouveau le thm de convergence dominée de Lebesgue.

On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle g_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\right) \varphi(x)\, dx$$

Or $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \begin{cases} \pi & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \langle g_n, \varphi \rangle = \pi \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \langle \pi Y, \varphi \rangle$

où Y est la fonction de Heaviside. Donc

3pts $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \pi Y(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$$

EX3 : (06 pts) $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$

1/ $xT = 1$: $\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x) + x\varphi(-x)}{x}\, dx$

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x))\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(-x)\, dx.$$

2pts $$= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

2/ Eq diff de $\hat{T}$: Partant de $xT = 1$, on aura :

$$\widehat{xT}(\xi) = \hat{1}(\xi) = 2\pi \delta_0$$

Or $\widehat{xT}(\xi) = -i \frac{d}{d\xi} \hat{T}(\xi)$. D'où

$$\boxed{\frac{d}{d\xi} \hat{T}(\xi) = 2\pi i \delta_0}$$ 2pts

3°/ <u>Détermination de $\hat{T}$</u> :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{T}(\xi) = 2\pi i\,\delta_0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{T}(\xi) = 2\pi i\, Y(\xi) + C$$ (Y : fonction de Heaviside)

Pour calculer C, on applique $\hat{T}$ à $e^{-\xi^2}$.

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(-x)}{x}\, dx.$$

or si $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2}$, $\hat{\varphi}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4}$ c'est une fonction paire donc $\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(-x) = 0$ d'où $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = 0$.

D'autre part : $$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = 2\pi i \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi + C \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

$$= 2\pi i \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C\sqrt{\pi}$$

Donc $\pi i \sqrt{\pi} + C\sqrt{\pi} = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\pi i}$

De là on déduit :

$$\hat{T}(\xi) = 2\pi i\, Y(\xi) - \pi i$$

$$= \pi i \left[2Y(\xi) - 1 \right]$$

$$= \pi i\, \mathrm{sign}(\xi).$$

2pts

$$\boxed{\hat{T}(\xi) = \pi i\, \mathrm{sign}(\xi)}$$